Title	射影直線上の8点のモジュライとIV型領域上の保型形式について
Author(s)	金銅, 誠之
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (2004), 2004: 130-139
Issue Date	2004
URL	http://hdl.handle.net/2433/214789
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
2004年度 pp.130-139

射影直線上の8点のモジュライとIV型領域上の保型形式について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　金銅誠之

§0. Introduction

周期理論が確立しているものとしてはアーベル多様体と $K3$ 曲面が挙げられる。それぞれ III 型および IV 型の有界対称領域が周期領域として現れる。コンパクト Riemann 面とその Jacobian の研究をはじめとし、アーベル多様体とテータ関数や III 型領域上の保型形式（すなわち Siegel modular form）の研究は歴史が古い。これに対して、「種数の小さい曲線 (g = 3,4,6) のモジュライ空間や del Pezzo 曲面のモジュライ空間を、$K3$ 曲面の周期理論を用いて I 型または IV 型有界対称領域の算術的部分群の商空間として記述し、次に近年 Borcherds [B] によって得られた IV 型有界対称領域上の保型形式論を用いてモジュライの研究を試みたい」というのが、この小論のテーマである。全てが成功しているわけではないが、典型的な例として射影直線上の8点のモジュライ空間の場合を取り上げる。

本論に入る前にこの研究の出発点となった3次曲面（次数3の del Pezzo 曲面）の場合にふれておく。3次曲面のモジュライ空間を4次元 complex ball の算術的部分群による商として記述したのは Allcock-Carlson-Toledo [ACT] である。彼等の手法はアーベル多様体の周期を用いるものである。最近、[DGK] において $K3$ 曲面の周期をもちいた別証明が与えられた。一方、 Complex ball は IV 型領域の部分領域になっているが、Allcock, Freitag [AF] は Borcherds による IV 型領域上の保型形式を complex ball に制限することでこのモジュライの射影モデルを与えた。このモデルは成木 [N] による Cayley の Cross ratio を用いたモデルと本質的に一致する。この最後の主張に関しては van Geemen [G] による考察もある。その後、テータコンスタントを用いた松本、寺杣 [MT1] の研究がある。以上の3次曲面のモジュライは、射影直線のある重み付き7点のモジュライと考える事ができ、Deligne, Mostow [DM], [Mo] の complex reflection group とも密接に関係している。

これ以外に K 3 曲面の周期を用いたモジュライの記述として [K1], [K2], Borcherds 理論をエンリケス曲面のモジュライに適応した [K3] があることを注意しておく。また本論の詳しいことは [K4] にまとめてある。

本論では、まず§1で主結果 Theorem (A), Theorem (B) を述べる。次に§2で Theorem (A) について、特に、なぜ Complex ball が周期領域として現れるかを説明する。§3で Theorem (B) について、特に Borcherds の結果をどう使うかを説明する。最後に§4で Deligne-Mostow の complex reflection group との関係について簡単に説明する。

§1. Main results

以下 $\mathcal{B}_n$ で n 次元 complex ball を、S_n で n 次対称群を表す。P_1^n で射影直線 $\mathbf{P}^1$ 上の順序つき n 点のモジュライ空間を表す（Mumford [Mu] を参照）。S_n は自然に P_1^n に作用している。

Theorem (A). $K3$ 曲面の周期を用いることで、P_1^8 を5次元 complex ball $\mathcal{B}_5$ の算術的部分群 $\Gamma'(\subset Aut(\mathcal{B}_5))$ による商空間 $\mathcal{B}_5/\Gamma'$ の Satake-Baily-Borel のコンパクト化 $\bar{\mathcal{B}}_5/\Gamma'$ として記述できる。すなわち $K3$ 曲面の周期写像を用いた同型

$$P_1^8 \cong \bar{\mathcal{B}}_5/\Gamma'$$

が存在する。さらに $\mathcal{B}_5/\Gamma'$ には S_8 が自然に作用しており、上の同型は S_8-equivariant である。

Remark (A). Deligne-Mostow [DM] は射影直線上の８点で分岐４次被覆として得られる曲線の Jacobian（正確には Prym 多様体） の周期を用いて Theorem (A) を示している。この方法では $\mathcal{B}_5$ は６次 Siegel 上半平面へ自然に埋め込まれている。一方、Theorem (A) の方法では、$\mathcal{B}_5$ は１０次元 IV 型有界対称領域 D_{10} に自然に埋め込まれている。

Definition. ８個の文字 $\{1,2,...,8\}$ を２個づつの４組に分けるたものを tableaux と呼び τ で表す。すなわち $\{\tau_{11},...,\tau_{42}\}=\{1,...,8\}$ とするとき

$$\tau=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \tau_{22}\\ \tau_{31} & \tau_{32}\\ \tau_{41} & \tau_{42}\end{pmatrix}.$$

このような τ は１０５個存在する。各 τ に対し

$$\mu_\tau=\Pi_{1\le i\le 4}\det(v^{\tau_{i1}}v^{\tau_{i2}})$$

と定める。ただし v^i は $\mathbf{C}^2$ の（列）ベクトルとする。Standard な tableaux は１４個存在し、一般の tableaux はこれらの一次結合として表せる。このことから S_8-equivariant な写像

$$\mu: P_1^8\to\mathbf{P}^{13}$$

を得るが、μ は埋め込みであることが知られている (例えば Koike [Koi])。

Theorem (B). IV 型領域 D_{10} 上の保型形式のなす１４次元の空間が存在し、それを $\mathcal{B}_5$ に制限することによって（Remark(A) 参照） S_8-equivariant な写像

$$\Psi:\bar{\mathcal{B}}_5/\Gamma\to\mathbf{P}^{13}$$

が得られ、Theorem (A) の同一視のもとに Ψ と μ は一致する。

Remark (B). Matsumoto-Terasoma [MT2] は、IV 型領域上の保型形式の代わりに、 Remark (A) で述べた曲線のテータコンスタントを用いて Theorem (B) を示した。

§2. On Theorem (A)

この節では、なぜ Complex ball が現れるかを中心に見ていく。

(1) A $K3$ surface associated to 8 points on $\mathbf{P}^1$.

$\{(\lambda_i:1)\}$ $(1\le i\le 8)$ を $\mathbf{P}^1$ の異なる８点とする。$Q=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ の bi-homogeneous coordinate を $(x_0:x_1,y_0:y_1)$ とする。Q の bidegree (4,4) の因子

$$D: y_0y_1(y_0^2\cdot\Pi_{i=1}^4(x_0-\lambda_ix_1)+y_1^2\cdot\Pi_{i=5}^8(x_0-\lambda_ix_1))=0$$

を考える。D で分岐する Q の２重被覆の極小モデル X は $K3$ 曲面に他ならない。射影 $(x_0 : x_1, y_0 : y_1) \to (x_0 : x_1)$ は X 上に楕円曲面構造 $\pi : X \to \mathbf{P}^1$ を定める。π は $y_0 = 0$ および $y_1 = 0$ に対応した２つの切断を持ち、また８点に対応した丁度８つの III 型特異ファイバーを持つ楕円曲面である。Q の involution

$$(x_0 : x_1, y_0 : y_1) \to (x_0 : x_1, y_0 : -y_1)$$

は X の位数４の自己同型 σ を引き起こし、π の各ファイバーを保っているので、この楕円曲面は iso-trivial である。このことが Deligne-Mostow 理論との関係がある理由である（最後の節を参照せよ）。X の Neron-Severi 格子 S_X は、X が generic な場合、階数１０で $det(S_X) = \pm 2^6$ であることが分かる。S_X の $H^2(X, \mathbf{Z})$ の中での直交補空間 T_X は transcendental lattice と呼ばれるが、T_X の符号は $(2, 10)$、$det(T_X) = \pm 2^6$ となり、$T_X \cong T = U \oplus U(2) \oplus D_4 \oplus D_4$ が成り立つ。ただし U は even unimodular, signature (1,1) の lattice, $U(2)$ は U の交点形式を２倍した lattice, D_4 は D_4 型の Dynkin 行列を交点行列とする lattice である。Lattice T の具体的に書ける自己同型 ρ が存在し、σ^* の T_X への作用は ρ と conjugate であることが分かる。

(2) Period domain.

まず

$$\mathcal{D} = \{\omega \in \mathbf{P}(T \otimes \mathbf{C}) : (\omega, \bar{\omega}) > 0, (\omega, \omega) = 0\}$$

と置くと、$\mathcal{D}$ が上の $K3$ 曲面の周期領域（２つの IV 型対称領域の disjoint union）を与える。今 の場合、$K3$ 曲面だけでなく、$K3$ 曲面とその自己同型 σ の組みを考えたい。$K3$ 曲面の正則２形式 ω_X は σ^* の固有ベクトルになっていることに注意し、次のように周期領域を定義する。まず ρ の固有空間への分解は

$$T \otimes \mathbf{C} = V_+ \oplus V_-$$

となっている。ただし $V_\pm = \{\omega : \rho(\omega) = \pm\sqrt{-1}\omega\}$ とする。ρ の性質から、$V_\pm$ は共に５次元が分かる。$V_\pm$ の点 ω は $(\omega, \omega) = 0$ を満たすことが定義から容易に導ける。従って

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} \cap \mathbf{P}(V_+) = \{\omega \in \mathbf{P}(V_+) : (\omega, \bar{\omega}) > 0\}$$

が $K3$ 曲面とその自己同型の組みの周期領域である。Lattice T の符合が $(2, 8)$ であることより、Hermitian form $(\omega, \bar{\omega})$ の符合は $(1, 4)$ であることが従う。すなわち適当な座標を選べば

$$(\omega, \bar{\omega}) = z_0\bar{z}_0 - z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 - z_3\bar{z}_3 - z_4\bar{z}_4$$

とでき、さらに $z_0 = 1$ とできるので $\mathcal{B}$ は４次元 complex ball と同型である。$\mathcal{B}$ の各点には（$K3$ 曲面の周期写像の全射性より）$K3$ 曲面が対応しているが、必ずしも ρ は自己同型からひき起こされているとは限らな い。ρ が ample class を保つという条件が必要となる。いま T の元 r で $r^2 = -2$ のものに対し

$$H_r = \{\omega \in \mathcal{B} : (\omega, r) = 0\}, \quad \mathcal{H} = \bigcup H_r$$

と置く。ただし r は T の全ての (-2)-vector を動くとする。すると、ρ が ample class を保つための必要十分条件は $\omega \notin \mathcal{H}$ である。

Remark. 簡単な計算で $\langle r, \rho(r)\rangle = 0$ が分かり、従って

$$\delta = \frac{r + \rho(r)}{2}$$

とおくと $\delta^2 = -1$ である。さらに $H_r = \mathcal{B} \cap \delta^{\perp}$ であることも確かめられる。

最後に算術的部分群を定義する。まず $T^* = Hom(T, \mathbf{Z})$ とすると、$A_T = T^*/T \cong (\mathbf{F}_2)^6$ が分かる。さらに $\mathbf{F}_2$ 上の二次形式

$$q_T : A_T \quad \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

が $q_T(x \bmod \mathrm{T}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle \bmod 2$ で定義される。q_T の直交群を $O(q_T)$ と表すと、$O(q_T) \cong S_8$ が知られている。以上の準備の下に

$$\Gamma = \{\gamma \in O(T) : \gamma \circ \rho = \rho \circ \gamma\},$$

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \mid A_T = 1\} = Ker\{\Gamma \longrightarrow O(q_T)\}$$

と置く。最後の写像 $\Gamma \to O(q_T)$ は全射であり、従って $\Gamma/\Gamma' \cong\ S_8$ が成り立つ。Γ は $Aut(\mathcal{B})$ の部分群で properly discontinuous に $\mathcal{B}$ に作用している。まとめると射影直線上の順序付き８点のモジュライ空間 P_1^8 の中の異なる８点に対応した開集合 $(P_1^8)^0$ から $(\mathcal{B} - \mathcal{H})/\Gamma'$ への S_8-equivariant な同型写像が上の構成で与えられ、この同型が P_1^8 から $\mathcal{B}/\Gamma$ の Satake-Baily-Borel のコンパクト化 $\tilde{\mathcal{B}}/\Gamma$ への同型をひき起こすというのが、Theorem(A) である。

(3) Discriminant locus.

上で見た P_1^8 には相異なる８点の他、どのような８点が加わり、これがどのような $K3$ 曲面に対応するかを述べることにする。まず高々３個（高々４個）の点が一致する場合を "stable" ("strictly semi-stable") な８点と呼ぶ。これは Mumford の意味での stable, semi-stable に他ならない。１点に対し数字の１を対応させ、もし２点（３点）が一致すれば２(3) を対応させて８点を書くとする。例えば相異なる８点は (11111111) と表す。このとき stable な８点は８点の順序を無視すると

(11111111), (2111111), (221111), (22211), (2222), (311111), (32111), (3221), (332)

のいずれかになる。Strictly semi-stable な場合は、minimal closed orbit が一意的に存在し (44) で代表される。Stable な８点に対しては§2 (1) の方法で $K3$ 曲面が対応する。そこには同じようにして楕円曲面の構造が入るが特異ファイバーは１に対して III 型、２に対して I_0^* 型、３に対して III^* 型が現れる。例えば (332) の場合は ２本の III^* 型特異ファイバーと １本の I_0^* 型特異ファイバーをもつ楕円曲面構造が入る。Strictly semi-stable な (44) には、K 3 曲面の II 型退化が現れる。今の場合は Shah [S] の４次の $K3$ 曲面の II 型退化のリストに対応している。

８点のうち (2111111) のタイプが $P_1^8 \setminus (P_1^8)^0$ の component の一般の点に対応している。Component の個数は２８であることは明らかであろう。また strictly semi-stable locus は３５個の点からなることも自明である。一方で $A_T = T^*/T \cong (\mathbf{F}_2)^6$ は次のベクトルから成る：

Type (00) : $x = 0$, $\#x = 1$ (*zero*);
Type (0) : $x \neq 0$, $q_T(x) = 0$, $\#x = 35$ (*non-zero isotropic vector*);
Type (1) : $q_T(x) = 1$, $\#x = 28$ (*non-isotropic vector*).

この数字の一致（35, 28）は偶然ではなく、non-zero isotoropic vector が $\mathcal{B}$ の Γ' を modulo としたカスプに一対一に対応しており、non-isotropic vector が $\mathcal{H}/\Gamma'$ の component に一対一に対応している。すなわち δ を§2、（2）の Remark のものとし

$$\mathcal{H}_\alpha = \sum_{\delta \bmod T=\alpha} \delta^\perp \cap \mathcal{B}$$

とおくとき、

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha\in A_T,\ q_T(\alpha)=1} \mathcal{H}_\alpha$$

で、各 $\mathcal{H}_\alpha$ は Γ' に関して同値ではない。

§3. On Theorem (B)

この節では、Borcherds [B] の IV 型対称領域上の保型形式論を用いた P_1^8 の射影モデルの構成について述べる。

(1) Lifting.

一変数の modular form は cusp の回りで Fourier 展開が考えられる。IV 型有界対称領域 $\mathcal{D}$ の場合は、次のように 1 次元の boundary component （cusp の一般化）の回りで Fourier-Jacobi 展開をもつ。まず 1 次元の boundary component に対し $\mathcal{D}$ は次のように表示できる (一変数の場合の上半平面 H^+ に相当する)：

$$\mathcal{D} : Im(\tau)\cdot Im(w) - Q(Im(z_1), ..., Im(z_n)) > 0, \quad Im(\tau) > 0.$$

ここで $\tau, w \in H^+$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n$ とし、Q は $\mathbf{Q}$ 上定義された正定値の 2 次形式である。F を $\mathcal{D}$ 上のある算術的部分群に関する重さ k の保型形式とするとき

$$F(\tau, z, w) = \sum_{m\geq 0} \theta_m(\tau, z)exp(mw)$$

と展開され、係数に現れる $\theta_m(\tau, z)$ を重さ k, 指数 m の Jacobi form と呼ぶ。

逆に 1 変数の重さ k の保型形式 f が与えられた時、これに適当なテータ関数を掛けることで重さ k, 指数 1 の Jacobi form が得られる。これに Hecke 作用素を施すことで 指数 k の Jacobi form が得られる。これらを足し上げて $\mathcal{D}$ 上の保型形式を構成するプロセスを (additive) Lifting と呼ぶ。IV 型の場合は Gritsenko 等の仕事があったが、Borcherds [B] が一般化している。

(2) Weil representation.

Lifting を構成する場合 1 変数の保型形式そのものではなく、ベクトル値の保型形式を考える方が都合が良い。そこで $A_T = T^*/T$ の群環 $\mathbf{C}[A_T]$ を考える。$\alpha \in A_T$ に対し、対応

する $\mathbf{C}[A_T]$ の生成元を e_α とし、$SL(2,\mathbf{Z})$ の $\mathbf{C}[A_T]$ への表現 ρ を次のように定義する。$SL(2,\mathbf{Z})$ の生成元として $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考え、

$$\rho(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})e_\alpha = (-1)^{q_T(\alpha)}e_\alpha; \quad \rho(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})e_\alpha = \frac{1}{8}\sum_\beta (-1)^{b_T(\alpha,\beta)}e_\beta$$

で ρ を定義する。但し b_T は２次形式 q_T に付随した双線形形式とする。$SL(2,\mathbf{Z})$ の作用は実際は $SL(2,\mathbf{F}_2)$ の作用に分解する。

正則写像

$$f = \{f_\alpha\} : H^+ \to \mathbf{C}[A_T]$$

が重さ k のベクトル値正則保型形式であるとは、

$$f_\alpha(\tau+1) = (-1)^{q_T(\alpha)}f_\alpha(\tau); \quad f_\alpha(-1/\tau) = \frac{\tau^k}{8}\sum_\beta (-1)^{b_T(\alpha,\beta)}f_\beta(\tau)$$

が成り立ち cusp で正則であるときをいう。我々が使うのは、もっとも簡単な重さ０の場合、すなわち $\mathbf{C}[A_T]^{SL(2,\mathbf{F}_2)}$ の元である。簡単な計算で $\mathbf{C}[A_T]^{SL(2,\mathbf{F}_2)}$ の次元は１５次元であることが分かる。$\mathbf{C}[A_T]$ には $O(q_T) \cong S_8$ が自然に作用しているが、ρ の作用と可換である。従って $O(q_T)$ は $\mathbf{C}[A_T]^{SL(2,\mathbf{F}_2)}$ に作用しているが、S_8 の既約表現として１次元と１４次元に分解する。この１４次元の既約表現を W とすると、(1) で述べた Lifting を使うことで S_8-equivqriant な線形写像

$$\phi : W \to W_4(\Gamma')$$

を得る。ただし $W_4(\Gamma')$ は Γ' に関する重さ４の $\mathcal{D}$ 上の保型形式のなすベクトル空間で、その上には $S_8 \cong \Gamma/\Gamma'$ が自然に作用している。Lifting の Fourier 展開の定数項を計算することで ϕ は単射が分かり、このようにして重さ４の保型形式のなす１４次元のベクトル空間 $\phi(W)$ を得る。

(3) Automorphic forms.

(2) で得られた保型形式の空間から成る linear system $\phi(W)$ の base locus を調べる必要がある。このために良い性質を持つ保型形式をこの中から探すことから始める。そのために少しことばを用意する。

２次形式 $A_T = T^*/T \cong (\mathbf{F}_2)^6$ の３次元部分空間 V で互いに直交する３つの non-isotropic vectors で生成されるものを maximal totally singular subspace と呼ぶ。また互いに直交する３つの non-zero isotoropic vectors で生成される３次元部分空間 M を maximal totally isotropic subspace と呼ぶ。V 上 b_T が恒等的に、M 上 q_T が恒等的に零となることを注意しておく。このとき次が成り立つ。

Lemma 1. M を A_T の maximal totally isotropic subspace とする。このとき

$$\sum_{\alpha \in M} e_\alpha \in \mathbf{C}[A_T]^{SL(2,\mathbf{F}_2)}$$

が成り立つ。

次に V を A_T の maximal totally singular subspace とする。V の totally isotropic subspace は2次元であるが、それを含む A_T の maximal totally isotropic subspace が丁度2つ存在する。これを M^+, M^- とする。このとき上の Lemma 1 より

$$f_V = \sum_{\alpha \in M^+} e_\alpha - \sum_{\alpha \in M^-} e_\alpha$$

は $\mathbf{C}[A_T]^{SL(2,\mathbf{F}_2)}$ の元を定めるが、この f_V は次の性質を持つ：

Lemma 2. 任意の $\alpha \in V$ に対し

$$t_\alpha(f_V) = -f_V$$

が成り立つ。ここで t_α は non-isotropic vector α に関する transvection

$$t_\alpha(x) = x + b_T(\alpha, x)\alpha$$

とする。

t_α は Γ の元にリフトできる。すなわち r を T の元で $r^2 = -2$ のベクトルで $\frac{r+\rho(r)}{2} \bmod \mathrm{T} = \alpha$ を満たすものを取ると、 $\delta = \frac{r+\rho(r)}{2}$ に付随した鏡映

$$s_\delta(x) = x + \frac{\langle x, \delta \rangle}{2}\delta$$

が A_T 上 t_α を引き起こす。ここで $\langle r, \rho(r) \rangle = 0$ より、$\delta^2 = -1$ であることを注意しておく。f_V の lifting F_V は重さ4の $\mathcal{D}$ 上の保型形式であるが、Lifting が S_8-equivariant であることと Lemma 2 より零因子 (F_V) は少なくとも

$$\sum_{\alpha \in V,\ q_T(\alpha)=1} \mathcal{D}_\alpha$$

を含む。但し

$$\mathcal{D}_\alpha = \sum_{\delta \bmod \mathrm{T}=\alpha} \delta^\perp$$

は可算無限個の超平面の和集合である。

F_V の零点を決定するために Borcherds [B] の無限積表示を持つ保型形式の理論を使う。まず次の様な meromorphic 重さ $-4(=(2-10)/2)$ のベクトル値保型形式 $h = \{h_\alpha\}$ を考える。すなわち h_α は α のタイプ、すなわち0か non-zero isotorpic か non-isotropic にのみ依存する関数とする。h_α を $\alpha = 0$ のとき h_{00}, α が non-zero isotropic のとき h_0, α が non-isotropic のとき h_1 と表す。このとき定義から

$$h_{00}(\tau+1) = h_{00}(\tau), h_{00}(-1/\tau) = \frac{\tau^{-4}}{8}(h_{00}(\tau) + 35h_0(\tau) + 28h_1(\tau)),$$

$$h_0(\tau+1) = h_0(\tau), h_0(-1/\tau) = \frac{\tau^{-4}}{8}(h_{00}(\tau) + 3h_0(\tau) - 4h_1(\tau)),$$

$$h_1(\tau+1) = -h_1(\tau), h_1(-1/\tau) = \frac{\tau^{-4}}{8}(h_{00}(\tau) - 5h_0(\tau) + 4h_1(\tau))$$

が成り立たなければならない。これを満たす h として

$$h_{00}(\tau) = 56\eta(2\tau)^8/\eta(\tau)^{16} = 56 + 896q + 8064q^2 + \cdots,$$

$$h_0(\tau) = -8\eta(2\tau)^8/\eta(\tau)^{16} = -8 - 128q - 1152q^2 - \cdots,$$

$$h_1(\tau) = 8\eta(2\tau)^8/\eta(\tau)^{16} + \eta(\tau/2)^8/\eta(\tau)^{16} = q^{-1/2} + 36q^{1/2} + 402q^{3/2} + \cdots$$

が挙げられる。ただし $\eta(\tau)$ は Dedekind の eta function で $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ とする。この h に Borcherds [B] の無限積表示を持つ保型形式の存在定理を用いることで、重さ 28(=56/2) で零因子が

$$\sum_{\alpha\in A_T,\ q_T(\alpha)=1} \mathcal{D}_\alpha$$

である保型形式 G が存在することが分かる。今 Φ を全ての maximal totally singular subspaces V にわたる F_V の積とする。Maximal totally singular subspaces の個数が１０５個であり、各 V には丁度４個の non-isotropic vectors が含まれることから、Φ は重さ４２０で各 $\mathcal{D}_\alpha$ 上で少なくとも重複度１５で零となる。一方で G^{15} は Φ と同じ重さで各 $\mathcal{D}_\alpha$ 上で丁度重複度１５で零となる。よって比を取り Koecher 原理を用いる事で G^{15} と Φ は定数倍の違いであることが分かる。以上から F_V の零点が完全に決まった。

(4) Projective model.

１４次元の保型形式からなる linear system $\phi(W)$ を $\mathcal{B}$ に制限することで S_8-equivariant な有理写像

$$\Psi = \mid \phi(W) \mid : \bar{\mathcal{B}}/\Gamma' \to \mathbf{P}^{13}$$

が定まる。これと Theorem(B) で述べた μ がどう関係するかを述べる。まず μ を定義する時にに用いた tableaux は１０５個あったことを思い出す。これより tableaux と A_T の maximal totally singular subspace が１対１に対応することが予想されるが、以下のように説明できる。

$\mathbf{P}^1$ の８点に付随した $K3$ 曲面 X は楕円曲面の構造を持ち、８点上で III 型の特異ファイバーを持っていた。ファイバーと一つの切断および特異ファイバーの components で生成される lattice を K とすると

$$K \cong U \oplus A_1^{\oplus 8}$$

となり、$A_K = K^*/K \cong (\mathbf{F}_2)^8$ が成り立つ。$a = (1,1,1,1,1,1,1,1) \in A_K$ とすると

$$a^\perp = \{(x_1, ..., x_8) \in A_K \ : \ \sum x_i \equiv 0(2)\}$$

で

$$q_K \mid a^\perp/\langle a\rangle = q_{S_X} = -q_T$$

が成り立つ。Tableaux

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

の各行に対し A_K のベクトル

$$(1,1,0,0,0,0,0,0),(0,0,1,1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1,1,0,0),(0,0,0,0,0,0,1,1)$$

が対応し、さらに上の q_T と q_K の関係から、4つの A_T の non-isotropic vector が対応する。これら4つの non-isotropic vector は A_T の maximal totally singula subspace V を定義する。μ_τ の零点は4つの component $x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_5 = x_6, x_7 = x_8$ から成る。他方、F_V の零点も V に含まれる4つの non-isotoropic vector α 対応する4つの component から成る因子

$$(\sum_{\alpha \in V} \mathcal{B} \cap \mathcal{D}_\alpha)/\Gamma'$$

である。以上から μ_τ の零点と F_V の零点が丁度対応することは、だいたい理解して頂けたと思う。

§4. Deligne-Mostow's complex reflection groups

射影直線の8点で分岐する4次のガロア被覆として得られる曲線を D とする：

$$D : y^4 = \Pi_{i=1}^8 (x - \lambda_i).$$

この曲線は Deligne-Mostow の理論の中に現れており、論文 [DM]、[Mo] の記号を用いると

$$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

が対応するものである。彼等はこの曲線の Hodge 構造と位数4の自己同型のそこえの作用を考察することで P_1^8 の complex ball の商としての記述を得た。ところで E を位数4の自己同型を持つ楕円曲線とすると、$E \times D$ のある位数4の自己同型で商をとったものと、8点に付随した $K3$ 曲面が双有理同値であることが分かる。この対応が、上で述べた $K3$ 曲面の周期を用いた方法と Deligne-Mostow の方法とを関係づけている。

Final Remark. ここでは射影直線の8点のモジュライを考えたが、これは種数3の超楕円曲線のモジュライとも考えることができる。一方、種数3,4,6の曲線のモジュライや del Pezzo 曲面のモジュライは、$K3$ 曲面の周期を用いて Complex ball や有界対称領域の算術商として表せる（[DGK], [K1], [K2]）。序文にも述べた様に、これらの場合に、保型形式を使った研究が考えられる。例えば種数3の場合、Coble [C] は Göpel 関数を使ったモジュライの $\mathbf{P}^{14}$ への $W(E_7)$-equivariant な埋め込みを与えている。これをここで述べた VI 型領域上の保型形式を用いた方法で Coble の結果が記述できれば面白いであろう。同様に次数4の del Pezzo 曲面のモジュライ（あるいは射影直線上の順序付き5点のモジュライ）は次数5の del Pezzo 曲面で10本の直線がのっており自己同型群が S_5 である。この場合にも

Borchreds の方法でモジュライを $\mathbf{P}^5$ の中の２次超曲面の交叉（５次 del Pezzo 曲面の標準モデル）として記述ができればおもしろいであろう。

Reference

[ACT] D. Allcock, J. A. Carlson, D. Toledo, *The Complex Hyperbolic Geometry of the Moduli Space of Cubic Surfaces*, J. Algebraic Geometry, **11** (2002), 659–724.

[AF] D. Allcock, E. Freitag, *Cubic surfaces and Borcherds products*, Comm. Math. Helv., **77** (2002), 270–296.

[B] R. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[C] A. Coble, *Algebraic geometry and theta functions*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **10** Providence, R.I., 1929 (3rd ed., 1969).

[DGK] I. Dolgachev, B. van Geemen, S. Kondō, *A complex ball uniformization of the moduli space of cubic surfaces viaperiods of $K3$ surfaces*, math.AG/0310342.

[DM] P. Deligne, G.W. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy,* Publ. Math. IHES, **63** (1986), 5–89.

[G] B. van Geemen, *A linear system on Naruki's moduli space of marked cubic surfaces.* Internat. J. Math. **13** (2002), no. 2, 183–208.

[Koi] K. Koike, *The projective embedding of the configuration space* $X(2,8)$, preprint.

[Kon1] S. Kondō, *A complex hyperbolic structure of the moduli space of curves of genus three*, J. reine angew. Math., **525** (2000), 219–232.

[Kon2] S. Kondō, *The moduli space of curves of genus* 4 *and Deligne-Mostow's complex reflection groups*, Adv. Studies Pure Math., **36** (2002), Algebraic Geometry 2000, Azumino, 383–400.

[Kon3] S. Kondō, *The moduli space of Enriques surfaces and Borcherds products*, J. Algebraic Geometry, **11** (2002), 601–627.

[Kon4] S. Kondō, *The moduli space of* 8 *points on* $\mathbf{P}^1$ *and automorphic forms*, preprint.

[MT1] K. Matsumoto, T. Terasoma, *Theta constants associated to cubic threefolds*, J. Algebraic Geom., **12** (2003) 741–775.

[MT2] K. Matsumoto, T. Terasoma, *Theta constants associated to coverings of* $\mathbf{P}^1$ *branching at eight points*, Compositio Math., **140** (2004) 1277–1301.

[Mo] G.W. Mostow, *On discontinuous actions of monodromy groups on the complex n-ball*, Jour. A. M. S., **1** (1988), 555–586.

[Mu] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory.* Springer.

[N] I. Naruki, *Cross ratio variety as a moduli space of cubic surfaces.* Proc. London Math. Soc. (3) **45** (1982), no. 1, 1–30.

[S] J. Shah, *Degenerations of $K3$ surfaces of degree* 4, Trans. A. M. S., **263** (1981), 271–308.